Chers élèves de 6ème math 2,

J’espère que vous vous portez bien et que vous parvenez à vous organiser au mieux.

Je ne vous ai pas trop embêté avec des math avant Pâques vu que ce n’est pas vraiment votre option mais après 5 semaines sans math, il me paraît opportun de s’y remettre petit à petit.

Ce dossier n’est soumis à aucune évaluation (les réponses se trouvent d’ailleurs en fin de dossier), il est destiné à retravailler les matières vues avant le confinement en vue de faciliter une prochaine reprise dans les meilleures conditions.

Profitez donc de ces quelques semaines pour retravailler les matières que vous n’avez pas encore acquises ou pour affiner vos compétences.

Pour toutes questions, je vous rappelle mon adresse mail : christophe_hanoul@outlook.fr

Bon travail à vous et prenez soin de vous.

C. Hanoul

UAA 2 : Variable aléatoire discrète

1. Dans le jeu de pile ou face, on gagne 1 € si l'on obtient «pile» et on perd 2 € si l'on obtient «face».
   Choisis une variable aléatoire et détermine sa loi de probabilité; son espérance mathématique; sa variance et son écart-type. (Les réponses en fin de dossier).

2. Au jeu de dés non truqué, on gagne 4 € si l'on obtient 5 et on perd 2 € dans les autres cas.
   Choisis une variable aléatoire et détermine sa loi de probabilité; son espérance mathématique; sa variance et son écart-type.

3. On jette un dé non pipé et on note le point de la face supérieure.
   On gagne : 5 € si ce point est 6;
   1 € si ce point est soit 5, soit 4; 0 € si ce point est soit 3, soit 2.
   On perd 0,5 € si ce point est l'as.
   Si X est le gain du joueur, détermine sa loi de probabilité; son espérance mathématique; sa variance et son écart-type.

4. On tire au hasard 1 échantillon de 3 articles dans une boîte de 12 articles dont 3 sont défectueux.
   Calcule l'espérance mathématique du nombre d'articles défectueux auxquels on peut s'attendre.

5. On a placé dans une urne 12 boules noires et 8 boules blanches.
   Si on tire une boule noire, on perd 3 € ;
   Si on tire une boule blanche, on gagne 5 € .
   a) Quelle variable aléatoire X choisis-tu ?
   b) Quelle est la loi de probabilité de X ?
   c) Calcule l'espérance mathématique de X.

6. On lance simultanément deux dés non truqués. Soit X, la variable aléatoire «*somme des points obtenus*».
   a) Quelles sont les valeurs possibles pour X ?
   b) Détermine la loi de probabilité (au centième près par défaut) de X, son espérance mathématique et sa variance. Calcule la probabilité de l'événement «la somme est supérieure ou égale à 7».

UAA 2 : Loi binomiale

7. Une urne contient 7 boules blanches et 5 boules noires indiscernables au toucher. On tire deux boules au hasard avec remise. Quelle est la probabilité d'obtenir une boule noire et une boule blanche lors des deux tirages ?

8. Lors d'un examen écrit, un étudiant se voit proposer une série de 20 questions à choix multiples : 5 réponses sont proposées à chaque question, une seule est correcte. L'étudiant répond au hasard à chaque question.
   Quel est le résultat le plus probable (espérance mathématique) ?

9. Une pièce de monnaie bien équilibrée est lancée 6 fois de suite. La variable aléatoire choisie est le nombre d'apparitions de «face».
   a) Calcule $P(X = 5)$ et $P(X < 3)$.
   b) Quel est le nombre de «face» espéré ?
   c) Déterminer $V(X)$

10. Un tireur atteint une cible avec une probabilité de 1/3. On imagine qu'il ait tiré 6 fois.
    a) Calcule la probabilité (à 0,001 près par défaut) d'atteindre la cible
       1) exactement deux fois;
       2) au plus deux fois;
       3) au moins trois fois.
    b) Combien de fois doit-il tirer pour que la probabilité de toucher la cible au moins une fois soit plus grande que 0,75?

11. On considère un lot de pièces dont 10% sont défectueuses. On choisit un échantillon de 100 pièces.
    Quelle est la probabilité de trouver dans cet échantillon au plus 10 pièces défectueuses ?

12. Quel est le nombre moyen de filles dans une famille de 10 enfants, en supposant qu'il y a équiprobabilité entre les garçons et les filles ?
    Calcule la probabilité pour que telle famille ait
    a) un nombre de filles égal à ce nombre moyen;
    b) exactement 3 garçons;
    c) au moins 2 filles.

13. Encore des examens... !
On sait que chaque élève a 40% de chances d'échouer, à la première session. Prenant cinq candidats au hasard, quelle est la probabilité
a) pour qu'aucun des cinq ne réussisse ?
b) pour que tous les cinq réussissent ?
c) pour qu'au moins deux réussissent ?

14. On lance 6 fois un dé non truqué; on gagne si on obtient 1 ou 6. Calcule la probabilité pour que le joueur obtienne
a) 1 ou 6, exactement 4 fois;
b) un autre résultat qu'un 1 ou qu'un 6.

Réponses :

1. l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire X est {1, -2}
P(1)=1/2 et P(-2)=1/2
E(X)=-1/2 (en moyenne, on perd 50 centimes à chaque lancer)
V(X)=9/4
$\sigma(X)$=3/2

2. l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire X est {4, -2}
P(4)=1/6 et P(-2)=5/6
E(X)=-1 (en moyenne, on perd 1 € à chaque lancer)
V(X)=5
$\sigma(X)=\sqrt{5}$

3. l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire X est {5,1,0, -1/2}
P(5)=1/6, P(1)=1/3, P(0)=1/3, P(-1/2)=1/6
E(X)=13/12 (en moyenne, on gagne 13/12 € à chaque lancer)
V(X)=485/144
$\sigma(X)$=1,84

4. l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire X est {0,1,2,3}
P(1)= $\frac{C_9^2.C_3^1}{C_{12}^3}$
P(2)= $\frac{C_9^1.C_3^2}{C_{12}^3}$
P(3)= $\frac{C_9^0.C_3^3}{C_{12}^3}$
E(X)=0.P(0)+1.P(1)+2.P(2)+3.P(3)=3/4

5. l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire X est {5,-3}
P(5)=8/20, P(3)=12/20
E(X)=0,2 (en moyenne, on gagne 0,2 € à chaque lancer)

6. la variable aléatoire X peut prendre les valeurs entières de 2 à 12
le tableau suivant donne les probabilités associées

X	P(X)
2	1/36
3	2/36
4	3/36
5	4/36
6	5/36
7	6/36
8	5/36
9	4/36
10	3/36
11	2/36
12	1/36

E(X)=2.1/36+3.2/36+…+12.1/36=7 (la somme obtenue est 7 en moyenne)
V(X)=5,83
P(X>=7)=(6+5+4+3+2+1)/36=0,58

7. la variable aléatoire X est le nombre de succès (succès=« tirer une seule boule blanche », échec= « tirer deux boules de même couleur »)
Il y a C_{12}^{6}=66 paires de boules dans l'urne
Il y a 7.5=35 paires bicolores
Il y a $C_7^2+C_5^2$=31 paires monocolores
P(S)=35/66 et P(E)=31/66
P(X=2)=$C_2^2.\left(\frac{35}{66}\right)^2.\left(\frac{31}{66}\right)^2=\frac{1225}{4356}$

8. la variable aléatoire X est le nombre de réponses correctes fournies (entre 0 et 20) (succès=« réponse correcte », échec=« réponse incorrecte »)
P(S)=1/5 et P(E)=4/5
E(X)=20.1/5=4 (donc : le résultat probable est 4 réponses correctes)

9. la variable aléatoire X est le nombre de « face » (de 0 à 6)
(succès=« apparition de face », échec=« apparition de pile »)
P(X=5)=$C_6^5\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{3}{32}$
P(X<3)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)=$C_6^0.\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^6+C_6^1.\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^5+C_6^2.\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{11}{32}$
E(X)=6.1/2=3 (donc : le résultat espéré est 3 « face »)

10. la variable aléatoire X est le nombre de succès (succès=atteindre la cible, échec=la rater) ; c'est une variable binomiale avec n=6 et p=1/3

P(X=2)= $C_6^2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^4$ =0,329

P(X<=2)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)= $C_6^0\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(\frac{2}{3}\right)^6+C_6^1\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{2}{3}\right)^5+C_6^2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^4$ =0,68

P(X>=3)=1-P(X<=2)=1-0,68=0,32

La probabilité de rater la cible n fois est $\left(\frac{2}{3}\right)^n$; or P(« toucher au moins une fois »)=1-P(« ne jamais atteindre la cible ») ; donc P(« ne jamais atteindre la cible »)=1-0,75=0,25 ; il faut donc $\left(\frac{2}{3}\right)^n$ < 0,25, soit n > 3,419 donc 4 fois

11. la variable aléatoire X est le nombre de pièces défectueuses (de 0 à 100)

P(X<=10)=P(X=0)+P(X =1)+...+P(X=10)= $\sum_{k=0}^{10} C_{100}^k.(0,1)^k.(0,9)^{100-k}$

12. la variable aléatoire X est le nombre de filles (de 0 à 10) ; c'est une variable binomiale avec n=10 et p=1/2

Le nombre moyen de filles est 5 (10.1/2)

P(X=5)= $C_{10}^5\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right)^5=24,6\%$

P(X=7)= $C_{10}^7\left(\frac{1}{2}\right)^7\left(\frac{1}{2}\right)^3=11,7\%$

P(X>=2)=1-P(X<2)=1-P(X=0)-P(X=1)= $1-C_{10}^0\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^{10}-C_{10}^1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^9=98,9\%$

13. la variable aléatoire X est le nombre d'élèves ayant échoué (de 0 à 5) ; c'est une variable binomiale avec n=5 et p=0,40

on calcule facilement P(X=5), P(X=0) et P(X<=3), soit respectivement 1,02 et 7,78 et 91,30 %

14. la variable aléatoire X est le nombre de gains (de 0 à 6) ; c'est une variable binomiale avec n=6 et p=1/3

on calcule facilement P(X=4) et 1-P(X=1) soit respectivement 1,02 et 8,2 et 73,7 %